

Ontbinden in factoren. Waar zijn we eigenlijk mee bezig?

Olaf Gosselink en Ton Konings

Dit artikel is het tweede artikel in een serie van zes over 'klein vakdidactisch onderzoek Algebra'. De artikelen zijn geschreven als afsluiting van een cursus Vakdidactiek Algebra⁽¹⁾ aan de tweedegraads lerarenopleiding wiskunde van het Instituut voor Leraar en School van de HAN in Nijmegen. De deeltijdstudenten, meestal beginnende docenten, schreven een artikel naar aanleiding van ervaringen in de klas. Aan de hand van de bestudeerde theorie analyseerden ze die ervaringen, ze maakten voornemens en konden die soms ook nog uitvoeren. In viertallen becommentarieerden ze elkaars werk. Vijf artikelen werden geselecteerd voor plaatsing in Euclides en werden daartoe in samenwerking met de docent, Ton Konings, nog grondig bewerkt. Daarover meer in het laatste artikel van de serie.

Probleemsituatie

Het hoofdstuk 'Ontbinden van factoren' ⁽²⁾ leverde mij en mijn 2 havo/vwo klas het afgelopen schooljaar veel problemen op. Het begon al met het activeren van de voorkennis, het wegwerken van haakjes. De helft van de groep was vergeten hoe het moet. Het ontbinden van een drieterm leverde vaak problemen op, zoals $x^2 - 7x + 12 = (x+4)(x+3)$. Het oplossen van vergelijkingen leidde tot fouten als: $x^2 + 4x = 12$ geeft $x(x+4)=12$, dus $x=12$ en $x+4 = 12$, dus $x=12$ of $x=8$. En als de leerlingen uiteindelijk de vergelijking wel hebben opgelost en hen wordt gevraagd "wat hebben jullie nu uitgerekend", dan weten ze dat vaak niet (meer). Tot slot verzochten leerlingen: "wat is dit saai en waarom moet dit eigenlijk?".

Ik dacht vaak "Waarom zie je het dan niet, het is toch zo eenvoudig". Hoe kan het dat ikzelf daar vroeger geen probleem mee had? Ik herinner me niet meer hoe mijn docent het heeft uitgelegd, wel dat hij vaak zei: "oefenen, oefenen, oefenen". Ik kon het wel, maar was ik ook als een kip zonder kop sommetjes aan het maken?

Ik vraag me af, waarom is dit zo moeilijk? En wat is eraan te doen? Maar ook: waarom zoveel moeite als de leerlingen in het volgende schooljaar de abc-formule krijgen aangereikt. Daarmee is ontbinden in factoren overbodig geworden, toch?

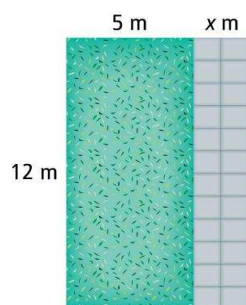
Eerst bespreek ik kort de opbouw van de methode en benoem daarbij nog enkele ervaringen, vervolgens probeer ik vanuit literatuur enige verklaringen en suggesties voor bovenstaande vragen te vinden.

Tot slot maak ik een aantal voornemens voor een volgende keer.

Analyse van de schoolmethode

Om tot een goede aanpak van het probleem te komen, bespreek ik summier het hoofdstuk 10 'Ontbinden in factoren' in Moderne Wiskunde en mijn lessen daarover.

- Voorkennis. Voor dit hoofdstuk betekent dat het wegwerken van haakjes. Dit is immers het tegenover gestelde van ontbinden in factoren. De methode gebruikt daarvoor het 'rechthoeksmodel' zoals hieronder weergegeven.


Voorbeeld

Schrijf de formule $b = 2(a + 8)$ zonder haakjes.

x	a	+8
2	2a	+16

$$b = 2a + 16$$

Voorbeeld

Schrijf de formule $b = (a + 3)(a - 8)$ zonder haakjes.

1	x	a	-8	2	x	a	-8
	a	...	...		a	a ²	-8a
	+3	...	...		+3	+3a	-24

$$3 \quad b = a^2 + 3a - 8a - 24$$

$$b = a^2 - 5a - 24$$

Ikzelf gaf daarnaast de Papegaaienbek methode. Leerlingen vonden dat gemakkelijker.

- § 10.1, In de eerste echte paragraaf wordt behandeld hoe je getallen als 360 en uitdrukkingen als $12x^2$ kunt ontbinden.
- § 10.2 gaat over het ontbinden in factoren van een tweeterm, op zoek naar de grootste gemeenschappelijke factor.
- § 10.3 heeft als titel over $A \times B = 0$. Onderstaande voorbeelden illustreren het idee:

Voorbeeld 1

Los op: $2h(h + 7) = 0$
 $2h = 0$ of $h + 7 = 0$
 $h = 0$ of $h = -7$

Voorbeeld 2

Los op: $3x(2x - 4) = 0$
 $3x = 0$ of $2x - 4 = 0$
 $x = 0$ of $x = 2$

Voorbeeld 3

Los op: $(2x - 3)(x + 7) = 0$
 $2x - 3 = 0$ of $x + 7 = 0$
 $x = 1\frac{1}{2}$ of $x = -7$

Een leerling merkte op: “waarom staat deze stof tussen het ontbinden van een tweeterm en een drieterm?”. Dat leek mij in eerste instantie een terechte opmerking. Later zal blijken dat deze paragraaf hier op zijn plaats is.

- § 10.4 behandelt het ontbinden van een drieterm. De methode geeft het rechthoeksmodel, (zoals in onderstaande figuur). Daarmee zoek je naar de twee getallen die samen het product en de som vormen,.

x	x	+11
x	x ²	+11x
+3	+3x	+33

samen 14x

Veel leerlingen kunnen er niet mee uit de voeten. Ik propageerde daarom een plaatje uit een ander deel:

optellen

$$x^2 + 2x - 24 = (x - 4)(x + 6)$$

vermenigvuldigen

Product	Som
1 x -24	1 - 24 = -23
2 x -12	2 - 12 = -10
3 x -8	3 - 8 = -5
4 x -6	4 - 6 = -2
-4 x 6	-4 + 6 = 2

- § 10.5, de vijfde paragraaf gaat over vergelijkingen oplossen. Hier komt al het voorgaande bij elkaar, maar dan zijn al veel leerlingen het spoor bijster. De laatste opgave over de opbrengst $O = 1000p - 200p^2$ als functie van de prijs van een bakje friet en bij welke prijs er geen inkomsten zijn, vond ik een mooie context. Die heb ik dan ook klassikaal besproken.
- § 10.6, De laatste paragraaf bevat de gemengde opdrachten.

Analyse vanuit vakdidactische literatuur

In Faarts (et al., 2012) worden oorzaken genoemd van fouten van leerlingen bij het oplossen van vergelijkingen. Daarvan kunnen bij het ontbinden de volgende categorieën herkend worden:

- Reageren op visuele kenmerken van formules: als geldt: $x(x + 4) = 0$, *dus* $x = 0$ *of* $x + 4 = 0$ dan zal ook wel: $x(x + 4) = 12$ *dus* $x = 12$ *of* $x + 4 = 12$, *dus* $x = 4$ *of* $x = 8$
- Gebrek aan betekenis van algebraïsche uitdrukkingen: juist het rechthoeksmodel wordt genoemd als ondersteuning voor het begrip van het ontbinden in factoren. Als daar geen goede basis voor is gelegd bij het wegwerken van haakjes, werkt dat model niet. Moderne Wiskunde hanteert dit rechthoeksmodel. Collega's en ook ikzelf negeren dat vaak, omdat de 'papegaaienbek' zo handig is, maar eigenlijk is dat veelal een onbegrepen trucje.
- Gebrek aan overzicht. Dat begint bij het oplossen van vergelijkingen met 'wat ben je aan het doen?': zoeken naar een getal waarvoor het klopt. Als dat met proberen snel lukt, heb je geluk gehad. Anders moeten er slimmere methoden komen. Welke vormen zijn er zoal? Daarnaast geeft de koppeling aan grafieken meer inzicht.
- Gebrek aan flexibiliteit. Als ze bijvoorbeeld bij $(x - 4)(x + 4) = 0$ beginnen met haakjes wegwerken vertonen geen zogenoemde 'symbol sense'.
- Gebrek aan oefening. Als er niet genoeg geoefend is ontstaat er geen routine bij het oplossen. Maar ook geldt: aanwezig inzicht gaat verloren door het drillen met gelijksoortige sommetjes. Gewenst is gevarieerde oefening waarbij het denkvermogen aangesproken blijft.

Dezelfde bron geeft ook vele aanwijzingen voor aanpak van de genoemde problemen. Wat daarvan bruikbaar is komt deels terug in het laatste deel van dit artikel.

In het Handboek Wiskundendidactiek (Drijvers (et al.), 2012) vond ik de aanwijzing dat leerlingen eerst het 'waarom' moeten kunnen uitleggen (Weten waarom), voordat ze gaan oefenen om routine (Weten dat) op te doen. Dit kan bereikt worden door een goede instapoefening te bedenken.

Kern van het probleem

Bij het ontbinden gaat het vooral om de volgende problemen:

1. Gebrek aan overzicht. Leerlingen richten zich op het uitvoeren van de handelingen met formules, het 'wat' en 'hoe', met te weinig overzicht over het 'waarom'. De paragrafen 10.0 tot en met 10.4 zijn voor leerlingen losse stukjes stof met weinig samenhang. Pas in §10.5 wordt bij het oplossen van vergelijkingen de bedoeling echt duidelijk: kwadratische vergelijkingen kunnen in diverse vormen staan. In sommige vormen zie je meteen de oplossing, in andere vormen moet je ze eerst herschrijven.

2. Leerlingen kunnen meer oefening gebruiken. Dit zit niet alleen in de hoeveelheid, maar juist in de variatie. Verder ontbreekt het aan rekenvaardigheid in werken met hele getallen.
3. Het hoofdstuk is taai en saai.

Aanvullende activiteiten en accenten:

Een aantal suggesties ten aanzien van thema 1 'overzicht':

- Een instapopdracht, waarmee leerlingen een beeld krijgen van de essentie van dit hoofdstuk. Bovendien wordt hiermee gestimuleerd te proberen, globaal te kijken en jezelf systematisch te controleren. Aan het eind van het hoofdstuk kan een vergelijkbare opdracht in wedstrijdvorm worden herhaald.

Los de volgende kwadratische vergelijkingen op.
(vind beide getallen $x = \dots$ waarvoor de vergelijking klopt).
Doe er zoveel mogelijk in 10 minuten.
Begin met de gemakkelijkste.
Probeer het handig aan te pakken.

$$x^2 - 5x + 4 = 0$$

$$(x - 5)(x + 4) = 0$$

$$x(x - 4) = 0$$

$$(x - 4)(x + 4) = 0$$

$$x^2 = 25$$

$$(x - 8)^2 = 81$$

$$2(x - 3)^2 + 9 = 17$$

$$x^2 + 4x = 0$$

$$x^2 + 5x - 6 = 0$$

$$2x^2 = x$$

$$x^2 + 4x - 20 = 0$$

In de korte nabespreking gaat het vooral om hoe ze het hebben gedaan, de conclusie: "De probeermanier is de meest inzichtelijke manier, maar op termijn onhandig, vanwege teveel werk. We zoeken dus een hulpmiddel (ontbinden)".

- Een tweede instapoefening (hier niet verder uitgewerkt): gegeven een aantal kwadratische functies van diverse vorm (Bijvoorbeeld $y = (x - 5)(x + 4)$, $y = x^2 + 4x$, $y = x(x - 4)$, $y = x^2 + 5x - 6$, $y = 2(x - 3)^2 + 17$ en een aantal grafieken. Welke grafiek hoort bij welke formule en waarom?
- Start elke les met de vraag: 'waar zijn we mee bezig?'
- Geregeld bij een opgave een grafiek tekenen.
- Wel het rechthoeksmodel van de methode gebruiken, maar dan van het begin af aan.

Suggesties ten aanzien van thema 2 'oefenen met variatie':

- Oefenen: Minirekenlesjes bij de start van de les, uit het hoofd puzzeltjes: het product van twee getallen is..., de som van die twee getallen is . Wat zijn de twee getallen?
- Oefenen met variatie door gebruik van ICT en sommen als Vul in: $(x + 8)(x + \dots) = x^2 + 19x + \dots$ en $(x + \dots)(x + 5) = x^2 + \dots x + 20$
- Controle van de oplossing van een vergelijking door systematisch de uitkomst weer invullen, en af en toe: na de ontbinding in factoren vervolgens weer de haakjes weg werken.
- Leren van fouten: Toon begrip voor fouten van leerlingen, bespreek ze klassikaal en de logica ervan.

Suggesties ten aanzien van thema 3 ‘taai en saai’:

- Waarschuw leerlingen aan het begin van het hoofdstuk (doe dat niet te vaak): dit wordt een taai en saai hoofdstuk, maar het is ‘een noodzakelijk kwaad’ en bevat vele handigheden waarmee de wiskunde verderop een stuk gemakkelijker wordt.
- In sommige opgaven worden contexten er met de haren bij gesleept. Echte toepassingen zijn nog te ver weg. Een presentatie met een paar mooie plaatjes, parabolen in bruggen, kogelbanen, touwen en gewelven, met enige toelichting, kunnen een les veraangenamen.

Conclusie

Dat het hoofdstuk ontbinden lastig is hoeft geen betoog. Het is vrij abstract. De oplossing lag volgens mij bij het meer oefenen met rijtjes opgaven in opklimmende moeilijkheidsgraad, zoals wij dat vroeger deden. Na grondige bestudering van het hoofdstuk in Moderne Wiskunde en de literatuur kom ik toch tot de conclusie dat de oplossing van het probleem moet worden gezocht in het inzicht verschaffen. Daarvoor zijn hierboven een aantal suggesties gedaan, maar ook constateer ik dat bij nader inzien het boek veel beter in elkaar zit dan ik dacht. Een volgende keer gaat dit samen met de besproken suggesties beslist beter uit de verf komen.

Noten

- (1) Bij de cursus werd gebruik gemaakt van een conceptversie van: Faarts, J., Goris, T., Konings, T., Monquill, A., Soto y Koelemeijer, G., (2012), Algebra voor leerlingen van 12-16, voor de lerarenopleiding, APS, Utrecht.
- (2) Moderne Wiskunde 2B havo/ vwo, editie 9, 2008, Noordhoff. Groningen.
- (3) Drijvers, P, Streun, A.v., Zwaneveld, B., (2012), Handboek Wiskundendidactiek, Epsilon Uitgaven, Utrecht.

Over de auteur:

Olaf Gosselink is deeltijdstudent aan de 2e graads lerarenopleiding wiskunde van het Instituut voor leraar en School van de HAN in Nijmegen en in de afgelopen twee schooljaren docent wiskunde aan de Nijmeegse Scholengemeenschap Groenewoud.

E-mailadres: olaf.gosselink@gmail.com

Ton Konings is lerarenopleider aan het Instituut voor leraar en School van de HAN in Nijmegen, en medeauteur van een serie vakdidactiekboeken voor de 2^e graads lerarenopleiding wiskunde. E-mailadres: Ton.Konings@han.nl